TD Fractions rationnelles

Pratique

PZ4 **Exercice 1** Décomposer en éléments simples

1. $\frac{X-1}{(X+1)^2(X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
2. $\frac{X}{(X+1)(X^2+X+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
3. $\frac{1}{(x+1)(x^3+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
4. $\frac{X^4}{X^3-X^2+X-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

OMO **Exercice 2** Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$, $F(X) = \frac{X^{2n}}{X^{2n+1}-1}$.

I97 **Exercice 3** Soit $F = \frac{X^2+2}{X^2(X^2+1)}$.

1. Justifier, sans les déterminer, l'existence de $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $F = \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-i} - \frac{c}{X+i}$.
   Indication : *Il suffit d'utiliser une propriété de* F.
2. Déterminer b et c.

YFY **Exercice 4** Soit $F = \frac{1}{(X^3-1)^3}$.

1. Calculer la partie polaire de F en 1.
2. En utilisant une propriété de symétrie, en déduire sa décomposition en éléments simples.

G0G **Exercice 5** Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{(X-\omega)^2} = \frac{A}{B}$.

1. Justifier l'existence de A, B. Expliciter B et le degré de A.
2. Pour $\omega \in \mathbb{U}_n$, que dire de $A(\omega X)$? En déduire A.

Applications

VCL **Exercice 6** Dérivée n-ième de $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$.

W98 **Exercice 7** Convergence et somme de la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

D97 **Exercice 8** Primitive de

1. $\frac{1}{1-x^4}$
2. $\frac{x}{1+x^4}$
3. $\frac{x^2}{x^3-1}$
4. $\frac{x^2}{1+x^4}$

6IB **Exercice 9** Primitive de

1. $\frac{1}{e^{2x}+1}$
2. $\frac{1}{\cos x \cos(2x)}$
3. $\frac{1}{\sin x + \sin(2x)}$

S4S **Exercice 10**

1. Décomposer $\frac{X^3+1}{X^3-2X^2+X}$ en éléments simples.
2. Calculer $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

RP1 **Exercice 11** Soit $R = \frac{1}{X^2+1}$. Montrer que $R^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(X^2+1)^{n+1}} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n+1}\right)$.

BJB **Exercice 12** À l'aide d'un changement de variable $u = \sqrt{F(x)}$, où F est une fraction rationnelle ou un polynôme, déterminer une primitive de

1. $\frac{1}{x\sqrt{2-x}}$
2. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

X2H **Exercice 13**

1. Pour $0 \leq x < \pi$, à l'aide du changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, calculer $\int_0^x \frac{1}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{1}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ (justifier), puis de $\int_0^\pi \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Décomposition et théorie

KZ4 **Exercice 14** Soit $B = (X-a_1)\dots(X-a_n)$, avec les a_i distincts, et $A \in \mathbb{K}[X]$, de degré $< n$.

1. Montrer que $\frac{A}{B} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{A(a_j)}{\prod_{i \neq j}(a_j - a_i)} \frac{1}{X-a_j}$.
2. En déduire que $A = \sum\limits_{j=1}^{n} A(a_j) \prod_{i \neq j} \frac{X-a_i}{a_j-a_i}$. Qu'a-t-on retrouvé ?

EL3 **Exercice 15** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n scindé à racines simples notées $a_1, \dots, a_n$.

1. Si les a_i sont non nuls, montrer que $\frac{-1}{P(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$.
2. Calculer, pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)}$.

WP1 **Exercice 16** Pôles doubles Soit $F = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible, et a un pôle de F, de multiplicité 2.

On note $\frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2}$ la partie polaire de F en a.

1. Montrer que $\alpha_2 = \frac{2A(a)}{B''(a)}$
2. Montrer que $\alpha_1 = \frac{2}{3}\frac{3A'(a)B''(a)-A(a)B'''(a)}{B''(a)^2}$.

HWR **Exercice 17** Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| = |Q(z)|$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que $Q = uP$.

RV6 **Exercice 18** ♣ Théorème de Gauss-Lucas Soit P un polynome complexe, de factorisation $P = \lambda\prod_{i=1}^m (X - x_i)^{\alpha_i}$, où les x_i sont deux à deux distincts.

1. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

   L'enveloppe convexe de $x_1, \dots, x_m$ est
   $$\left\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\right\}.$$
2. Montrer que toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

   En particulier le module maximal d'une racine de P' est $\leq$ au module maximal d'une racine de P.
3. On note $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Montrer que si $0 \in P'(H)$, alors $P(H) = \mathbb{C}$.
4. Montrer que l'équibarycentre des racines de P' comptées avec multiplicité est égal à celui des racines de P.

0SY **Exercice 19** ★ [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_k = \frac{X^k}{X^n+1}$.

1. Décomposer F_k en éléments simples.
2. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$,
   $$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$
3. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on note $\|Q\|_\infty = \max_{|z|=1} |Q(z)|$. Montrer que $\|P'\|_\infty \leq n\,\|P\|_\infty$.

Fractions rationnelles

C3H **Exercice 20** Soient $F_1, F_2 \in \mathbb{R}(X)$ prenant la même valeur en une infinité de points. Montrer que $F_1 = F_2$.

CWR **Exercice 21** Pour $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$, on définit $F' = \frac{A'B - B'A}{B^2} \in \mathbb{C}(X)$.

1. Justifier que F' est bien définie.
2. Montrer que si $\deg F \neq 0$, alors $\deg F' = \deg F - 1$.
3. Soit F tel que $F' = \frac{1}{X}$. Montrer que $\deg F = 0$ et aboutir à une contradiction.

55U **Exercice 22** Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle non constante, et $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{C}$ sa fonction associée. Montrer que soit f est surjective, soit il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$.

FER **Exercice 23** ★ [ENS] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

GWS **Exercice 24** ★

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \in \mathbb{R}\}$ est infini. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle et $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{C}$ la fonction associée. On suppose que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ est infini. Montrer que $F \in \mathbb{R}(X)$.

SNO **Exercice 25** ★ Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A - XI_n$ et $B - XI_n$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$.
2. Montrer que $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$.

2T8 **Exercice 26** ★ Automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ [Oral X]

Si $F \in \mathbb{C}(X)$ est non constante, on pose $\Phi_F\colon R \in \mathbb{C}(X) \mapsto R(F) \in \mathbb{C}(X)$.

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ non constant. Montrer que Φ_F est un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.
2. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est de la forme Φ_F, pour F non constant.
3. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est injectif.
4. Montrer que Φ est un automorphisme d'algèbre si et seulement s'il existe $R \in \mathbb{C}(X)$ tel que $\Phi(R) = X$.
5. On suppose que Φ_F est un automorphisme. Montrer que F peut s'écrire comme le quotient de deux polynômes de degré ≤ 1.
6. Déterminer les automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.